



TITLE:

# Quasi-Similarity of Operators (作用素論とその応用)

AUTHOR(S):

北野, 孝一

---

CITATION:

北野, 孝一. Quasi-Similarity of Operators (作用素論とその応用). 数理解析研究所講究録 1978, 338: 92-102

ISSUE DATE:

1978-11

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/104239>

RIGHT:

QUASI-SIMILARITY OF OPERATORS

富山大 理 北野孝一

線形作用素についての quasi-similarity の概念は Sz-Nagy と Foias [18] により導入されて以来、不変部分空間の問題と関連が深いこともあり、近年多くの研究が発表されている。

1. Quasi-similarity と Hyperinvariant Subspaces

[定義]  $H, K$  は Hilbert 空間とし、 $A \in B(H)$ ,  $B \in B(K)$  に対して、 $A$  が  $B$  の quasiaffine transform である (記号  $A \prec B$ ) というのは、 $H$  から  $K$  への 1 対 1 かつ dense range をもつ作用素  $S$  が存在して  $SA = BS$  が成り立つことである。  $A$  と  $B$  が quasi-similar である (記号  $A \sim B$ ) というのは、 $A$  が  $B$  の、かつ  $B$  が  $A$  の quasiaffine transform になっているときである。

Quasi-similarity と hyperinvariant subspace の関係については、

[定理] ([18, 8.16.20])  $A \in B(H)$ ,  $B \in B(K)$  に対して、 $A \sim B$  で、 $B$  が hyperinvariant subspace をもつ (即ち  $B$  の hyper-

invariant subspaces の全体を  $\text{Lat}_h B$  で表わすとき,  $\text{Lat}_h B \neq \{0, K\}$

$\Rightarrow A$  も hyperinvariant subspace をもつ (即ち,  $\text{Lat}_h A \neq \{0, H\}$ ).

この定理に関連して Sz-Nagy, Foias [18] は unitary operator と, Hoover [16] は normal operator と quasi-similar な作用素に対して.

[定理]  $A \in B(H)$ ,  $B \in B(K)$ ,  $B$  は unitary または normal なら,

$A \cong B$

$\Rightarrow B$  の hyperinvariant subspaces の lattice  $\text{Lat}_h B$  と  $\text{Lat}_h A$  の sublattice との間には lattice isomorphism が存在する.

Fialkow [7] は non-normal operator まで拡張することを試みている. まず  $T \in B(H)$  に対して,  $(T)'$ :  $T$  の commutant,  $(T)''$ :  $T$  の second commutant,  $\mathcal{P}(H)$ :  $H$  の closed subspaces の全体,  $\gamma(T) = \{m \in \mathcal{P}(H); m = \overline{Q_m H} \text{ for some operator } Q_m \in (T)''\}$  とするとき.

[定理] (I)  $T \in B(H) \Rightarrow \gamma(T) \subset \text{Lat}_h T$ .

(II)  $S, T \in B(H)$ ,  $S \cong T \Rightarrow \exists$  function  $g: \gamma(T) \rightarrow \mathcal{P}(H)$  s.t.

(1)  $g(m) \in \text{Lat}_h S$  for  $\forall m \in \gamma(T)$ .

(2)  $g$  injective.

(3)  $g(\{0\}) = \{0\}$ ,  $g(H) = H$ .

(4)  $m, n \in \gamma(T)$ ,  $m \subset n \Rightarrow g(m) \subset g(n)$ .

(5)  $\{m_\alpha\}_{\alpha \in I} \subset \gamma(T)$ ,  $\bigcap_\alpha m_\alpha = \{0\} \Rightarrow \bigcap_\alpha g(m_\alpha) = \{0\}$ .

$$(6) \quad \{m_\alpha\}_{\alpha \in I} \subset \delta(T), \quad \forall m_\alpha \in \delta(T) \Rightarrow g(\bigvee m_\alpha) = \bigvee g(m_\alpha).$$

$$(7) \quad S|g(m) < T|m \quad \text{for } \forall m \in \delta(T).$$

(8)  $R$  が non-zero part of  $S|g(m) \Rightarrow \forall$  nonempty closed-and-open subset of  $\sigma(R)$  は  $\sigma(T|m)$  と交わる.

(9)  $V$  が non-zero part of  $T|m \Rightarrow \forall$  nonempty closed-and-open subset of  $\sigma(V)$  は  $\sigma(S|g(m))$  と交わる.

[例]  $E$  を spectral operator  $T \in B(H)$  の spectral measure とする.  $T$  の spectral subspaces は次のようになる

$$\text{Lat}_{sp} T = \{ E(\sigma)H; \sigma \text{ は Borel set} \}$$

ところで  $E(\sigma)$  は  $(T)''$  の元で, idempotent であるから  $\text{Lat}_{sp} T \subset \delta(T)$  が成り立つ.

[系]  $T \in B(H)$  spectral operator,  $S \stackrel{g}{\sim} T$

$\Rightarrow \text{Lat}_h S$  には  $T$  の spectral subspaces の lattice  $\text{Lat}_{sp} T$  と lattice isomorphic な sublattice が存在する.

[注1]  $A$  と  $B$  が similar 即ち invertible な  $J$  が存在して  $AJ = JB$  が成り立つならば (i)  $m \in \text{Lat } B \Leftrightarrow Jm \in \text{Lat } A$   
(ii)  $\forall m \in \text{Lat } B$  に対して  $B|m$  と  $A|Jm$  は similar になる.  
これらは quasi-similar の場合には拡張できない. (ii) については Fialkow [7] は  $A \stackrel{g}{\sim} B$  であるが,  $m \in \text{Lat } A$  に対して  $A|m$  は  $B$  のどんな part と  $\forall$  quasi-similar にならないような作用素が存在することを示している.

[注2] lattice isomorphic に関して、Herrero [14] は、2つの quasi-similar な order 3 の nilpotent operators  $T$  hyperinvariant な subspaces の lattices  $L$  isomorphic にならないものが存在することを示している。

## 2. Quasi-similarity と Jordan Operator

Apostol [1] は normal operator と quasi-similar になる条件を求めている。

[定理]  $X$  を complex Banach space とし、 $T \in B(X)$  が Hilbert space 上の normal operator と quasi-similar である。  
 $\Leftrightarrow X_n \in \text{Lat } T$  ( $n=1, 2, \dots, m$ ),  $T|_{X_n}$  は normal operator と similar かつ  $\bigcap_{i=1}^m \left( \bigvee_{n=i}^m X_n \right) = \{0\}$  if  $m=\infty$  となるような basic sequence  $\{X_n\}_{n=1}^m$  が存在する。

ここで countable sequence  $\{X_n\}_{n=1}^m \subset \mathcal{P}(X)$  が basic であるとは、for any  $n$ ,  $X_n$  と  $\bigvee_{k \neq n}^m X_k$  が complementary である。  
 $\bigcap_{i=1}^m \left( \bigvee_{n=i}^m X_n \right) = \{0\}$  if  $m=\infty$  が成り立っていることである。

Fialkow [7] は上の定理を spectral operator に拡張を試みている。

[定理]  $T \in B(H)$  が spectral operator と quasi-similar である。

$\Leftrightarrow M_n \in \text{Lat } T$  ( $n=1, 2, \dots, m$ ),  $T|_{M_n}$  spectral operator

かつ  $\bigcap_{i=1}^m (\bigvee_{n=i}^m m_n) = \{0\}$  かつ  $m=\infty$  をみたすような basic sequence  $\{m_n\}_{n=1}^m$  が存在する.

[注]  $\Rightarrow$  が成り立つかどうかは未解決である.

次に有限次元の空間の operator が Jordan canonical form と similar になることの無限次元の空間の場合への拡張を考えてみよう.

[定義]  $\tilde{H} = \overbrace{H \oplus \cdots \oplus H}^n$  に act している ( $H$  は Hilbert space)

$n \times n$  行列  $[A_{ij}]$  で定義される nilpotent operator

$$A_{i,i+1} = 1_H \quad \text{for } i=1, 2, \dots, n-1$$

$$A_{i,j} = 0 \quad \text{for other entries}$$

を order  $n$  の Jordan block operator という ( $H$  上の zero operator は order 1 の Jordan block operator である). 次に,  $H_1, H_2, \dots, H_m$  を Hilbert spaces とし,  $n_1, \dots, n_m$  を自然数とする.  $\tilde{H}_k = \overbrace{H_k \oplus \cdots \oplus H_k}^{n_k}$  ( $k=1, 2, \dots, m$ ) とし,  $\tilde{H}_k$  に act する order  $n_k$  の Jordan block operator を  $J_k$  とするとき,  $\tilde{H}_1 \oplus \cdots \oplus \tilde{H}_m$  に act している operator  $J_1 \oplus \cdots \oplus J_m$  を Jordan operator という.

Apostol, Douglas, Foias [2] (Williams [21] で別証) は nilpotent operator に対して.

[定理] 任意の nilpotent operator は Jordan operator と quasi-similar である.

これを Williams [23] は algebraic operator まで拡張した.

[定理]  $A$  を  $H$  上の algebraic operator とし、 $\sigma(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$  ( $i \neq j$  ならば  $\lambda_i \neq \lambda_j$ ) とあるとする。

$\Rightarrow$  Hilbert spaces  $H_1, \dots, H_n$  上に  $A$  を  $H$  上で act している Jordan operators  $J_1, \dots, J_n$  が存在して  $A \sim B = \sum_{k=1}^n \oplus (\lambda_k 1_{H_k} + J_k)$  が成り立つ。

Sz-Nagy, Foias [19] は Jordan model の generalization に対応する概念を用いて、 $C_0$  operator の性質を quasi-similarity との関連で調べている。

### 3. Quasi-similarity と Spectrum の関係

quasi-similarity と spectrum の関係については、normal operator の場合には、Douglas [5] によれば、

[定理] quasi-similar normal operators は unitary 同値である。従って quasi-similar normal operators は equal spectra をもつ。

[注] unitary equivalent の手法では hyponormal operator に拡張できない。

[例] Sarason [Halmos 13, p309] : similar にもかかわらず unitary equivalent でない 2 つの hyponormal operators が存在する。

Clary [4] は別の手法により、hyponormal operator ま

で拡張した.

[定理] quasi-similar な hyponormal operators は equal spectra をもつ.

それから, Hoover [17] によれば,

[定理] quasi-similar isometries は unitary equivalent. 従って equal spectra をもつ.

ところが一般には quasi-similarity は spectrum を保存しない (Sz-Nagy, Foias [18, p250]). Hoover [17] は更に, compact 性も保存されないことを示している.

[例]  $A \sim B$  であって,  $\sigma(A) = \{z : |z| \leq 1\}$ ,  $\sigma(B) = \{0\}$  しかも  $B$  は compact operator であるようなものが存在することを示している. 勿論  $A$  は compact にならない.

[注] [18] では spectrum は保存されないが spectrum の boundary についてはどうか? . これに対する否定的解答にもなっている.

ところが point spectrum については, Rosenthal [Duke Math. J. 41(1974)] によれば,

[定理]  $A \sim B \Rightarrow \sigma_p(A) = \sigma_p(B)$ .

direct sum に関連して, Herrero [15] は,

[定理]  $T = \sum \oplus T_n$  (direct sum)

$\Rightarrow \sigma(S) = \overline{\bigcup_n \sigma(T_n)}$  であり, かつ  $T \sim S$  となる  $S$  が存在する.



この定理の証明には、Gilfeather [12] の結果を用いている。次に Roseblum の定理に関連するものとして、Hoover [17] は、

[定理]  $A \approx B \Rightarrow \sigma(A) \cap \sigma(B) \neq \emptyset$ .

実際はもっと弱い条件で成り立つのである。

$B < A \Rightarrow \sigma(A) \cap \sigma(B) \neq \emptyset$ .

quasi-invertible operator  $X$  が存在して、 $AX = XB$  が成り立っているとする。今  $D_{A,B}$  を  $B(H)$  上に次のように定義する。 $D_{A,B}(T) = AT - TB$  for  $T \in B(H)$ . この  $D_{A,B}(\cdot)$  は linear かつ continuous となることは明らか。ここで、 $\sigma(A) \cap \sigma(B) = \emptyset$  であると仮定しておくことにする。そして  $D_{A,B}(\cdot) = \mathcal{R} - \mathcal{L}$  とおく、但し  $\mathcal{R} = AT$ ,  $\mathcal{L} = TB$  である。このとき  $\mathcal{R}\mathcal{L} = \mathcal{L}\mathcal{R}$  である。従って  $\sigma(\mathcal{R} - \mathcal{L}) \subset \sigma(\mathcal{R}) - \sigma(\mathcal{L})$  であるから  $\sigma(D_{A,B}) \subset \sigma(A) - \sigma(B)$  となり、 $0 \notin \sigma(D_{A,B})$  となる。これより  $D_{A,B}$  は invertible となる。しかし今の場合  $D_{A,B} = 0$  従って  $D_{A,B}$  は not invertible である(矛盾)。ゆえに  $\sigma(A) \cap \sigma(B) \neq \emptyset$  が成り立つ。

essential spectrum に関しては、Williams [22], Fialkow [6] によれば、

[定理]  $A \approx B \Rightarrow \sigma_e(A) \cap \sigma_e(B) \neq \emptyset$ .

quasi-similarity と spectrum の関係については、operator

を制限した場合等に関する詳しい研究は Fialkow [6] 等に見られる.

#### 4. Compact や Quasi-nilpotent Operator との関連.

Apostol, Douglas, Foias [2], Foias, Pearcy [9], Williams [21] によれば compact operator との関連では.

[定理] 任意の nilpotent operator は compact operator と quasi-similar である.

quasinilpotent の場合には, Foias, Pearcy [9] によれば.

[定理]  $T$  は quasinilpotent operator とする.

$\Rightarrow$  compact operators  $K_1, K_2$  で次の関係をみたすものが存在する.  $K_1 < T < K_2$ .

しかし, quasi-similar まではもって行けないのである.

[定理] どんな compact operator と quasi-similar にならない quasinilpotent operator が存在する.

次に Fialkow [6] による quasinilpotent operator と quasi-similar になる operator についての若干の結果をあげておく. まず  $Q_{qs}$  を定義しておく.

$$Q_{qs} = \{ T \in B(H) : T \text{ はある quasinilpotent operator と quasi-similar である} \}.$$

[定理]  $Q_{qs}$  は nilpotent operators 全体の norm

closure の真の subset である。

$Q_{gs}$  は countable direct sum で closed である。

[定理]  $X \subset \mathbb{C}$  が  $Q_{gs}$  に属する operator の spectrum になる。

$\Leftrightarrow$   $X$  は compact, connected かつ  $0$  を含んでいる。

最後に、Apostol, Foias, Pearcy [3] によれば algebraic operator の場合には、

[定理] 任意の algebraic operator は normal + compact なる形の operator と quasi-similar になる。

invariant subspace の存在との関連では、

[定理]  $T$  が quasi-nilpotent で、normal + compact なる形の operator に quasi-similar である。

$\Rightarrow$   $T$  は nonzero compact operator と commute する。

#### REFERENCES

- [1] C. Apostol, Operators quasisimilar to a normal operator, Proc. Amer. Math. Soc., 53(1975), 104-106.
- [2] C. Apostol, R. G. Douglas & C. Foias, Quasisimilar models for nilpotent operators, Trans. Amer. Math. Soc., 224(1976), 407-415.
- [3] C. Apostol, C. Foias & C. Pearcy, Quasiaffine transforms of operators, Notices of Amer. Math. Soc., 25(1978).
- [4] S. Clary, Equality of spectra of quasisimilar hyponormal operators, Proc. Amer. Math. Soc., 53(1975), 88-90.
- [5] R. G. Douglas, On the operator equation  $S^*XT = X$  and related topics, Acta Sci. Math. (Szeged), 30(1969), 19-32.

- [6] L. A. Fialkow, A note on quasisimilarity of operators, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, 39(1977), 67-85.
- [7] L. A. Fialkow, A note on quasisimilarity II, *Pacific J. Math.*, 70 (1977), 151-162.
- [8] P. A. Fillmore, *Notes on operators Theory*, van Nostrand, 1970.
- [9] C. Foias & C. Pearcy, A model for quasinilpotent operators, *Michigan Math. J.*, 21(1974), 399-404.
- [10] C. K. Fong & M. Radjabalipour, On quasilinear transforms of spectral operators, *Michigan Math. J.*, 23(1976), 147-150.
- [11] C. K. Fong, Quasilinear transforms of subnormal operators, *Pacific J. Math.*, 70(1977), 361-368.
- [12] F. Gilfeather, Norm conditions on resolvents of similarities of Hilbert space operators and applications to direct sums and integrals of operators, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 68(1978), 44-48.
- [13] P. R. Halmos, *Hilbert space problem book*, van Nostrand, 1967.
- [14] D. A. Herrero, Quasisimilarity does not preserve the hyperlattice, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 65(1977), 80-84.
- [15] D. A. Herrero, Quasisimilar operators with different spectra, (Preprint).
- [16] T. B. Hoover, Hyperinvariant subspaces for  $n$ -normal operators, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, 32(1971), 109-119.
- [17] T. B. Hoover, Quasisimilarity of operators, *Illinois J. Math.*, 16 (1972), 678-686.
- [18] B. Sz.-Nagy & C. Foias, *Harmonic analysis of operators on Hilbert space*, 1967. [English Transl. 1970].
- [19] B. Sz.-Nagy & C. Foias, On injections, intertwining operators of class  $C_0$ , *Acta Sci. Math. (Szeged)*, 40(1978), 163-167.
- [20] C. Pearcy & A. Shields, A survey of the Lomonosov technique in the theory of invariant subspaces, *Mathematical Surveys*, 13(1974), Amer. Math. Soc.
- [21] L. R. Williams, Similarity invariant for a class of nilpotent operators, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, 38(1976), 423-428.
- [22] L. R. Williams, Quasisimilar operators have overlapping essential spectra, (to appear *Acta Sci. Math.*)
- [23] L. R. Williams, A quasisimilarity model for algebraic operators, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, 40(1978), 185-188.